Tentamen algebra I, maandag 4 februari 2008.

opgave 1: Zij G een eindige groep en zij S_n de permutatiegroep op n elementen. Zij $\varphi: \ G \longrightarrow S_n$ een surjectief groepshomomorfisme voor zekere $n \geq 2$, zodat de kern van φ precies $n+1$ elementen bevat.

a) Bepaal het aantal elementen van de groep G.

b) Bewijs dat G een normaaldeler van index twee bevat.

c) Bewijs dat er een surjectief groepshomomorfisme bestaat van G naar $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

opgave 2: Zij G een groep en laten N_1 en N_2 twee normaaldelers van G zijn.

a) Bewijs dat de afbeelding $\varphi : G \longrightarrow G/N_1 \times G/N_2$ gegeven door $\varphi(g) = (gN_1, gN_2)$ een groepshomomorfisme is.

b) Bepaal de kern van de afbeelding φ.

c) Neem aan dat $[G : N_1] = [G : N_2] = 2$ en dat $N_1 \neq N_2$. Bewijs dat de groep G een derde normaaldeler $N_3 \neq N_1, N_2$ met index $[G : N_3] = 2$ bevat.

opgave 3: Zij A een eindige abelse groep die voortgebracht wordt door de elementen a, b en c. Er geldt onder andere dat $3a = 3b = 20c = 0$ en er is gegeven dat A precies 45 elementen bevat.

a) Geef een isomorfisme van A met een produkt van groepen van de vorm $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

b) Geef een surjectief groepshomomorfisme $\varphi : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow A$.

c) Bestaat er ook een surjectief groepshomomorfisme van $\mathbb{Z}^2$ naar A?

opgave 4: Zij G een eindige groep en zij $N \subset G$, $N \neq \{e\}$, een normaaldeler. De normaaldeler N wordt voortgebracht door een element $x \in N$, d.w.z. dat $N = \{x^i \mid i = 1, 2, \ldots, n\} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ met $n = \ ord(x) > 1$. Voor $g \in G$ definieren we $m_g \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ als het kleinste niet-negatieve getal zodat geldt $gxg^{-1} = x^{m_g}$.

a) Stel $g \in G$ is een element van orde $ord(g) = k$. Bewijs dat $ggd(m_g, n) = 1$ en dat $(m_g)^k \equiv 1 \ mod\ n$.

b) Zij $\psi : G \longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ de afbeelding gegeven door $\psi(g) = m_g \ mod\ n$. Bewijs dat ψ goed gedefinieerd is en dat ψ een groepshomomorfisme is.

c) Wanneer bevat G een ondergroep H met $H \supset N$ zodat H isomorf is met de diedergroep D_n?

Een uitwerking van dit tentamen zal een dag na het tentamen in Nestor te vinden zijn.